

# OBSTÁCULOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR: CONTRIBUIÇÕES DE BACHELARD E DAVYDOV

Aline Mota de Mesquita Assis<sup>1</sup>

Beatriz Aparecida Zanatta<sup>2</sup>

**RESUMO:** Bachelard foi um filósofo que estudou Matemática, ministrou aulas de química e física e desenvolveu, dentre outras, a concepção de obstáculos epistemológicos, que são fatores impeditivos à aprendizagem do aluno, à construção efetiva do espírito científico. Com a finalidade de apresentar alguns destes obstáculos encontrados no processo de ensino e aprendizagem de transformação linear, este artigo propõe uma análise deste processo feita a partir da reflexão do processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, tendo como aporte teórico os escritos de Bachelard, principalmente a sua obra *A formação do espírito científico*. Faz-se também uma breve análise do método de ensino proposto por Davydov, a Teoria do Ensino Desenvolvimental, relacionando alguns de seus aspectos com as ideias de Bachelard. Após, levanta-se os seguintes obstáculos fazendo as referidas aproximações: reprodução do conteúdo do livro didático no quadro negro; não entendimento do erro do aluno; obstáculo da experiência primeira, onde o aluno não consegue ampliar seu conhecimento, ficando preso às ilustrações iniciais; generalização do conhecimento a partir de dados empíricos; relação álgebra e geometria; simbologia algébrica; aplicação de conteúdos vistos anteriormente e fazer demonstrações e provas. Conclui-se que para romper tais obstáculos faz-se necessário um ensino que priorize a formação de conceitos científicos, visando a formação integral do aluno, e uma possibilidade disso é o método do Ensino Desenvolvimental proposto por Davydov e sustentado pela Teoria Histórico-cultural de Vygotsky. Segundo este método a verdadeira aprendizagem se dá por meio de uma atividade de aprendizagem que faz com que o aluno se aproprie dos procedimentos lógicos e investigativos da ciência e seja capaz de reproduzir o conhecimento teórico vinculado ao objeto de estudo, a saber, faz com que ele seja capaz de abstrair e generalizar o conteúdo ensinado, formando assim, o conceito.

**Palavras-chave:** Obstáculos epistemológicos. Ensino de Matemática. Ensino Desenvolvimental. Transformação Linear.

## INTRODUÇÃO

[...] a álgebra acumula todas as relações e nada mais que as relações. É enquanto relações que as diversas geometrias são equivalentes. É enquanto relações se elas têm realidade, e não por referência a um objeto, a uma experiência, a uma imagem da intuição (BACHELARD, 1978, p. 104).

Segundo Lima (2004), “Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles”. Ela surgiu com a junção de teorias comuns a várias áreas

---

<sup>1</sup> Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, Doutoranda em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás e bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás. E-mail: [aline.mesquita@ifg.edu.br](mailto:aline.mesquita@ifg.edu.br)

<sup>2</sup> Doutora em Educação Escolar pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho e Professora Adjunta I da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Brasil. E-mail: [beatrizapzanatta@gmail.com](mailto:beatrizapzanatta@gmail.com)

da Matemática, como equações lineares, equações diferenciais, teoria matricial, álgebra e geometria. Estudando o seu desenvolvimento histórico podemos comprovar isso e constatar que as aplicações de seus conceitos vão muito além da Matemática, estendendo-se a todas as áreas que tenham fundamentos relacionados com esta ciência, como é o caso das engenharias, economia e física. Boldrini (1980) e Anton e Rorres (2001) mostram algumas das possíveis aplicações da Álgebra Linear, dentre elas tem-se o uso de transformações lineares para estudos aplicados à óptica e à criptografia.

O objeto de estudo deste ramo da Matemática não surgiu claramente, como mostra sua história. Nos séculos XVII e XVIII havia apenas uma intuição entre os matemáticos de que existia uma certa relação entre álgebra e geometria. Somente depois da aceitação dos números complexos, comprovados por Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) na terceira década do século XIX e com o desenvolvimento da Matemática provocado por tal fato, é que se conseguiu formalizar a base da análise vetorial. Já a teoria de transformação linear surgiu com o desenvolvimento da teoria de matriz, a qual teve contribuições de vários matemáticos importantes, como Leonhard Euler (1707 – 1783), Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 – 1852) e foi formalizada por Arthur Cayley (1821 – 1895) no início da segunda metade do século XIX. Apesar de vários matemáticos se empenharem no desenvolvimento dessas teorias, até o final do referido século não havia um conjunto de teorias bem estabelecidas que pudessem ser denominadas de Álgebra Linear.

Assim, percebe-se o quão difícil foi para os matemáticos unir a geometria com a álgebra utilizando ideias muito gerais aplicáveis a várias áreas da Matemática e a outras áreas do conhecimento e formalizar o objeto de estudo da Álgebra Linear.

A ideia de obstáculo epistemológico foi introduzida pelo francês Gaston Bachelard (1884 – 1962) em sua obra *A formação do espírito científico* publicada em 1938. Bachelard iniciou seus estudos em Matemática enquanto trabalhava nos Correios de sua cidade natal, Bar-sur-Aube, com o intuito de cursar engenharia, mas devido à Primeira Guerra Mundial, esse sonho foi banido, o que fez com que Bachelard iniciasse sua carreira no magistério secundário ministrando aulas de química e física. Aos 35 anos começa a estudar filosofia, disciplina que também passa a ministrar e em 1930 é convidado a lecionar na Faculdade de Dijon. Em 1940 torna-se professor na Sorbonne e em 1955 entra para a Academia das Ciências Morais e Políticas da França. Durante sua carreira no magistério vivenciou as grandes revoluções científicas do século XX, fato que contribuiu para o desenvolvimento de suas obras, além da

sua vivência com as ciências e a filosofia. Como foi, na maior parte de sua vida, um professor, fica fácil compreender o caráter pedagógico de suas obras.

Quanto à concepção de obstáculo epistemológico, Trovon (2009) assim a descreve:

Bachelard observou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos. Assim, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de que detém esse conhecimento (TROVON, 2009, p. 1).

Deste modo, “[...] é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado” (BACHELARD, 1996, p. 17) a fim de conhecer as causas de estagnação, regressão e inércia da ciência, em específico, da Matemática restringida ao conteúdo de transformação linear no campo da Álgebra Linear. Essas causas, que são fatos mal interpretados por uma época, Bachelard (1996) denomina de “contra pensamentos” e para identifica-los faz-se necessário pensar no real, no fato, analisando o objeto, a saber, o processo de ensino e aprendizagem de transformação linear.

Portanto, o objetivo deste artigo é identificar alguns obstáculos epistemológicos que permeiam o processo de ensino e aprendizagem de transformação linear a partir das contribuições de Bachelard e Davydov. Davydov propõe uma metodologia de ensino que contribui com a superação dos obstáculos apontados por Bachelard, em particular no que diz respeito à superação do pensamento empírico.

A análise se deu pela reflexão e discussão da prática docente de uma das autoras que ministra a disciplina de Álgebra Linear em sua instituição de trabalho.

O texto inicia-se relacionando os obstáculos com a formação de conceitos científicos segundo a Teoria do Ensino Desenvolvimental proposto por Davydov, seguindo de um levantamento dos principais obstáculos no processo de ensino e aprendizagem de transformação linear. Conclui-se que para romper com os osbtáculos relacionados é necessário o desenvolvimento de uma metodologia que priorize o desenvolvimento integral do aluno, contribuindo para a formação de conceitos científicos, que é o caso do método proposto por Davydov.

## **A FORMAÇÃO DE CONCEITOS CIENTÍFICOS**

Vasily Vasilyevich Davydov (1930 – 1998) foi um psicólogo russo que voltou-se para o campo da psicologia pedagógica e tornou-se um grande pesquisador da área fundamentando suas pesquisas na Teoria Histórico-cultural formulada por Vygotsky. Dentre suas pesquisas, um resultado que se destaca, pela sua importância, é a formulação da Teoria do Ensino Desenvolvimental, a qual “oferece uma base teórico-metodológica que reúne princípios psicológicos em função de objetivos pedagógicos e didáticos de formação do pensamento teórico-científico dos alunos” (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 316).

Segundo a Teoria do Ensino Desenvolvimental, o desenvolvimento do aluno deve ser integral e o ensino deve considerar a historicidade do conteúdo, partindo de uma rede conceitual formada no intelecto do aluno, passando pela zona de desenvolvimento próximo e levando-o à formação de um novo conceito.

Com base na concepção histórico cultural de Vygotsky, Davydov (1988) argumenta que o sistema de ensino não tem conseguido contribuir para a solução de importantes problemas ligados à tarefa social porque os conteúdos e métodos de ensino se orientam predominantemente para a formação do pensamento empírico, com pouca contribuição ao desenvolvimento do aluno. Conforme argumenta, esse tipo de conhecimento adquirido por métodos transmissivos e de memorização não se converte em ferramenta para lidar com a diversidade de fenômenos e situações que ocorrem na vida prática.

Para o autor ainda que o conteúdo do pensamento empírico seja obtido diretamente por meio de sensações e percepções, ele passa por abstração e generalização primárias, de modo que os elementos externos são separados e classificados. Toma-se por essência o visível externo, em detrimento dos nexos internos que não são desvendados:

Sua principal função (referindo-se ao pensamento empírico) consiste na classificação dos objetos, na construção de um firme esquema de “determinantes”. Este tipo de pensamento pressupõe duas vias [...] a via de “de baixo para cima” e a via “de cima para baixo”. Na primeira construímos a abstração (conceito) na formalização geral, a qual por sua essência não pode expressar em forma mental o conteúdo especificamente concreto do objeto. No caminho de “de cima para baixo” esta abstração é saturada de imagens visuais concretas do objeto correspondente, torna-se “rica” e com “conteúdo”, mas não como construção mental, senão como combinação das descrições e exemplos concretos que a ilustram (DAVYDOV, 1988, p. 107-108, destaques do autor, tradução nossa).

Assim, embora extremamente relevante para o processo de ensino-aprendizagem, o pensamento empírico apresenta uma série de limitações no que se refere à formação da imagem cognoscitiva do objeto estudado.

Para superar a concepção tradicional empiricista, Davydov (1988) propõe um ensino mais vivo e eficaz, visando o desenvolvimento do pensamento teórico. O pensamento teórico se forma pelo domínio dos procedimentos lógicos do pensamento que, pelo seu caráter generalizador, permite sua aplicação em vários âmbitos da aprendizagem. Consiste num processo por meio do qual se revela a essência dos objetos de conhecimento e, com isso, permite a aquisição de métodos e estratégias cognitivas gerais da ciência em estudo, em função de analisar e resolver problemas e situações concretas da vida prática (LIBÂNEO, 2004). Cabe, portanto, ao ensino a tarefa de propiciar mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento teórico, que se forma junto com as capacidades e hábitos correspondentes.

O conhecimento teórico é uma combinação de abstração substancial, generalização e conceitos teóricos, e constitui o objetivo principal da atividade de ensino. O pensamento teórico envolve reflexão, análise e plano interior das ações. Esse tipo de pensamento deve ser o foco da atividade de aprendizagem do aluno.

Vale registrar que, embora o pensamento teórico seja um avanço na tentativa de superação do pensamento empírico no contexto escolar, para Davydov o pensamento teórico não exclui a necessidade do pensamento empírico:

O pensamento teórico ajuda os alunos a se orientarem entre as relações gerais e permite-lhes derivar dessas relações várias consequências específicas. Tal pensamento não exclui a necessidade do pensamento empírico – este tipo de pensamento deveria ser visto como um tipo de pensamento dirigido a outros tipos de tarefas (DAVYDOV, 1999, p.10).

Isto significa dizer que o pensamento empírico deve ser considerado como degrau ao conhecimento teórico. Como afirma Hedegaard (2002, p. 206) “os alunos já aprenderam o procedimento epistemológico empírico em suas atividades práticas diárias; eles ainda precisam adquirir os procedimentos epistemológicos teóricos”. Conforme Davydov (1999, p.10):

O pensamento teórico não se origina e não se desenvolve na vida cotidiana das pessoas. Ele se desenvolve em um tipo de ensino que utiliza um currículo baseado em conceitos dialéticos do pensamento. É este tipo de ensino que tem efeito desenvolvimental. (DAVYDOV, 1999, p.10)

Portanto, é de fundamental importância para o educador comprometido com o desenvolvimento integral dos alunos possibilitar e estimular a formação do pensamento teórico por meio de situações desencadeadoras e atividades organizadas para tal.

Semelhantemente, Bachelard diz: “No fundo, o ato de conhecer dá-se *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização” (BACHELARD, 1996, p. 17). Em outras palavras, é necessário romper com o conhecimento empírico e formar conhecimentos científicos.

[...] por ser científico pela própria natureza, o conceito científico pressupõe seu lugar definido no sistema de conceitos, lugar esse que determina a sua relação com outros conceitos. Marx definiu com profundidade a essência de todo conceito científico: “Se a forma da manifestação e a essência das coisas coincidissem imediatamente, toda ciência seria desnecessária.” Nisto reside a essência do conceito científico. Este seria desnecessário se refletisse o objeto em sua manifestação externa como conceito empírico. Por isso o conceito científico pressupõe necessariamente outra relação com objetos, só possível no conceito, e esta outra relação com o objeto, contida no conceito científico, por sua vez pressupõe necessariamente a existência de relações entre os conceitos, ou seja, um sistema de conceitos. Desse ponto de vista, poderíamos dizer que todo conceito deve ser tomado em conjunto com todo o sistema de suas relações de generalidade, sistema esse que determina a medida de generalidade própria desse conceito, da mesma forma que uma célula deve ser tomada com todas as suas ramificações através das quais ela se entrelaça com o tecido comum (Vigotski, 2001, p. 293-294).

Segundo Davydov (1988), para formar o conhecimento científico ou conhecimento teórico, o ensino deve ser guiado por atividades de estudo, as quais colocam o aluno em uma busca científica pelo objeto, o conteúdo, busca esta guiada pelo movimento do abstrato ao concreto. Para que isso ocorra, é necessário que o acesso aos conteúdos escolar percorra, conforme sugere o autor, o processo de investigação e os modos de pensar a ciência. Isso envolve estratégias de ensino que ajudem os alunos a internalizarem formas de pensamento, habilidades de pensamento, que levam a uma reflexão sobre a metodologia investigativa da ciência. Em outras palavras, a aprendizagem deve resultar, para o aluno, no domínio de ferramentas mentais para pensar sobre determinado objeto ou conteúdo.

Todo este processo está relacionado com a forma com que o professor estrutura e organiza a atividade de estudo; este deve investigar o aspecto nuclear do objeto, onde se encontram as relações fundamentais de sua gênese e historicidade, caracterizando o princípio geral do objeto de estudo, assim, o professor consegue organizar a atividade de modo que o aluno realize abstrações e generalizações, tornando-se capaz de utilizar as relações gerais do objeto na análise e solução de problemas específicos que o envolvam (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 332 – 333). Para Davydov (1988) estas tarefas devem ser baseadas na resolução de problemas, pois, através deles o aluno tem uma relação íntima com o movimento dialético do pensamento e com a formação de um método para lidar com o objeto nas situações mais gerais

e nas mais particulares. Por meio de uma situação problema que contemple os princípios do ensino desenvolvimental, o aluno capta a relação principal de um conceito. Freitas (2012, p. 413) esclarece este processo dizendo: “O que os alunos precisam descobrir, principalmente, não é a solução imediata do problema, mas as condições de origem do conceito que estão aprendendo, o qual, inclusive, servirá para a resolução, mas servirá, sobremaneira, para que adquiram um modo de pensamento”.

Bachelard fala da necessidade de saber formular problemas e perguntas, pois é por meio destes que surge o conhecimento.

Em primeiro lugar, é preciso saber formular problemas. E, digam o que disserem, na vida científica os problemas não se formulam de modo espontâneo. É justamente esse *sentido do problema* que caracteriza o verdadeiro espírito científico. Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído (BACHELARD, 1996, p. 18, grifos do autor).

Para que haja uma aprendizagem significativa é preciso existir um processo investigativo, o qual se dá por meio de perguntas a serem respondidas. Bachelard, diz que “Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado” (*Ibidem*, p. 19). Assim, é necessário que o aluno questione, fale suas dúvidas, verbalize suas ideias para que se concretize o aprendizado. É preciso ir além do método de ensino empirista, lidando com obstáculos que foram formados no decorrer do desenvolvimento da ciência com o intuito de ultrapassá-lo e ter a formação de conceitos científicos na mente do aluno.

Lidar com estes obstáculos a fim de atingir a formação de conceitos científicos não é tarefa fácil e exige do professor uma organização e planejamento do ensino diferentes das formas habituais. Mesmo Bachelard dizendo que na educação obstáculos epistemológicos são obstáculos pedagógicos, a tarefa ainda é árdua, pois esses obstáculos são desconhecidos e exige do professor um processo de investigação para conseguir identifica-los e supera-los. É exatamente isso que Libâneo diz ao analisar o pressuposto de Davydov de que o ensino deve se dar por meio da pesquisa:

A idéia do ensino com pesquisa é a de que o professor faça pesquisa enquanto ensina, presente na noção de ensino como “experimentação formativa”, em que o professor intervém ativamente por meio de tarefas nos processos mentais das crianças e produz novas formações por meio dessa intervenção. (LIBÂNEO, 2004, p. 19).

É necessário fazer o que Bachelard orienta: “[...] colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto

e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer enfim à razão razões para evoluir” (BACHELARD, 1996, p. 24).

Analisemos então alguns obstáculos epistemológicos/pedagógicos existentes no processo de ensino e aprendizagem de transformação linear.

## **OBSTÁCULOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR**

Trovon (2009) ao analisar os obstáculos epistemológicos descritos por Bachelard no âmbito da Matemática, argumenta que

A análise dos obstáculos no contexto da matemática deve ser realizada com uma atenção particular, pois, segundo argumentou Bachelard, a evolução dessa ciência apresentaria uma maravilhosa regularidade em seu desenvolvimento, conhecendo períodos de paradas, mas não etapas de erros ou rupturas que destruíssem o saber estabelecido anteriormente (TROVON, 2009, p. 2).

Assim, é necessário buscar na história da Matemática as causas de estagnação, inércia e regressão, que definem os obstáculos epistemológicos, ou pedagógicos como disse Bachelard, dentro deste contexto, considerando os aspectos particulares da ciência, “analisando o sentido da mencionada regularidade e sua relação com a aprendizagem” (*Ibidem*, p. 2).

Restringindo esta análise ao conteúdo de transformação linear, podemos listar os seguintes obstáculos que precisam ser superados:

*1) Reprodução do conteúdo do livro didático no quadro negro:* Os professores, presos a uma forma de ensino tradicional e inspirados em seus professores também tradicionais, não buscam novas metodologias de ensino, permanecendo com a cultura de reprodução do livro didático, sem se preocupar com um método de ensino que seja envolvente para os alunos. O conteúdo de transformação linear é muito abstrato e apenas reproduzir o que está no livro didático não garante uma aprendizagem significativa com formação de conceitos. Isso caracteriza o que Bachelard chama de falta de “senso do fracasso”, onde o professor, julgando-se um mestre e tendo a concepção de que quem ensina manda, se recusa a mudar o seu método de ensino. O autor ainda diz que nunca viu um professor mudar o seu método pedagógico e conclui dizendo que a relação psicológica professor-aluno é muitas vezes patogênica e que merece uma psicanálise especial (BACHELARD, 1996, p. 24).

2) *Não entendimento do erro do aluno*: O erro surge quando o aluno tenta aprender algo novo e saber lidar bem com esse erro é o que garante a formação do conceito científico. “Quando o resultado correto se mantém na memória, é muitas vezes graças à construção de toda uma estrutura de erros” (*Ibidem*, p 289). O professor precisa, então, reconhecer e entender o erro do aluno e não apenas diagnosticá-lo e corrigi-lo, afinal erros contêm um potencial educativo que precisa ser melhor explorado tanto pelo professor como pelo aluno (PINTO, 2000, p. 37).

3) *Obstáculo da experiência primeira*: O aluno fica preso às imagens, aos exemplos iniciais e introdutórios de transformação linear, tendo dificuldades de abandonar a observação e atingir a abstração dita por Davydov, eles ficam presos às primeiras constatações acerca do conteúdo, criando falsos conceitos. “Substitui-se o conhecimento pela admiração, as ideias pelas imagens” (BACHELARD, 1996, p. 36). Borges (2007) descreve esse fato argumentando que esse obstáculo se dá pela dificuldade dos alunos em entenderem que a Matemática representa um modelo da realidade e não a realidade em si.

Ao utilizarem ilustrações geométricas para resolverem os problemas na geometria euclidiana, os alunos se apegam às imagens, não entendendo que a matemática também pode ser entendida como um modelo da realidade e não a realidade em si mesma, as figuras simbólicas são apenas representações da realidade e não a realidade em si, servindo apenas como ideias introdutórias dos conceitos abstratos que irão surgir. (devemos considerar ainda, que existem matemáticas que não são representação de nada real) (BORGES, 2007, p. 8).

4) *Generalização do conhecimento a partir de dados empíricos*: O aluno, ao não compreender bem a definição, restringe seu raciocínio apenas aos exemplos e quer toma-los como verdade geral para todos os casos, ficando preso a dados empíricos, sem considerar que são apenas casos particulares. É um conhecimento vago e sem significado. Acredita-se que nesse momento há uma falha do professor em não conduzir o aluno no processo de generalização do conhecimento. “Em suma, mesmo seguindo um ciclo de *ideias exatas*, percebe-se que a generalidade imobiliza o pensamento, que as variáveis referentes ao aspecto geral ofuscam as variáveis matemáticas essenciais” (BACHELARD, 1996, p. 72). Mas é preciso esclarecer que essa generalização não é a mesma que se tem nas proposições e teoremas matemáticos que são apresentados em seu ápice de generalidade. Trovon (2009, p. 5) esclarece bem o que é a generalização como obstáculo: “Trata-se de uma precipitação do pensamento indutivo, em que a observação de

casos particulares é considerada suficiente para induzir afirmações gerais”. O autor, baseado nas ideias de Bachelard, ainda diz:

É bom lembrar que a técnica da *indução matemática* não se baseia em uma lógica indutiva. A observação de casos particulares não serve para fundamentar uma demonstração, no máximo, pode sugerir uma conjectura. No plano escolar, o risco de ocorrer uma generalização precipitada reside na tentativa de transformar o saber cotidiano em saber científico. De uma forma geral, as experiências vagas caracterizam o espírito não científico, pois estão ainda impregnadas de concepções voltadas mais para o saber cotidiano do que para a ciência (*Ibidem*, p. 6).

5) *Relação álgebra e geometria*: O conhecimento do aluno ainda é muito segmentado. Ele não consegue relacionar conteúdos algébricos com geométricos. Quando o conteúdo de transformação linear é introduzido, o que geralmente os professores fazem é essa relação. Nesse momento o aluno se apega a apenas uma dessas representações, menosprezando a outra por julgá-la mais difícil ou não terem muita afinidade. E se o professor insiste em relacionar representações algébricas com representações geométricas, partindo de uma delas para chegar à outra, a situação fica bem pior, pois isso exige do aluno um maior domínio de cada um desses conhecimentos e como eles estão segregados surge um obstáculo à formação completa do conceito.

6) *Simbologia algébrica*: A Álgebra Linear, como já dito, é um campo muito abstrato, o que exige maior utilização de símbolos para representar seus conceitos. Por um lado, isso dificulta muito a aprendizagem do aluno, pois além de ter que compreender o significado de determinado objeto e construir o conceito científico, ele precisa aprender o símbolo que representa aquele conceito e tê-lo sempre à mente, além de saber usá-lo com veemência. Por outro lado, quando o aluno domina bem esses símbolos, ele tem em mãos uma forte ferramenta de trabalho que lhe permite desenvolver os cálculos e aperfeiçoar o raciocínio algébrico. É uma ferramenta importante para o ensino e o aprendizado de transformação linear que tanto o professor como o aluno precisam saber lidar bem.

7) *Aplicação de conteúdos vistos anteriormente*. Como transformação linear não é o primeiro conteúdo a ser aprendido em um curso de Álgebra Linear e como na Matemática um novo conceito se constrói em cima de outro conceito já solidificado, problemas surgem quando os alunos precisam buscar conceitos introdutórios do curso e aplica-lo ao conceito de transformação linear a fim de construir novos conceitos. É isso o que acontece quando, por

exemplo, o professor ensina o processo de obtenção de um subespaço vetorial a partir de uma transformação linear e solicita aos alunos a identificação da base desse subespaço. Caracterizar um subespaço e determinar sua base são conteúdos já estudados antes de transformação linear, mas relacionar todos eles é uma dificuldade que surge no processo.

8) *Fazer demonstrações e provas*: Demonstrar e provar exigem do aluno um bom domínio da Matemática e suas técnicas, por isso não é tarefa simples, ainda mais quando é a primeira vez que se vê um determinado conteúdo; essa tarefa só se tornará mais fácil quando o aluno já tiver visto a demonstração ou a prova anteriormente (BORGES, 2007, p. 12). Além disso, muitos professores não ensinam seus alunos a pensar matematicamente para conseguir demonstrar, por exemplo, o teorema do núcleo e da imagem ou, bem mais simples ainda, para provar se uma determinada transformação é linear ou não. Bachelard argumenta que tal fato se dá devido à repetição do conteúdo: “Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto” (BACHELARD, 1996, p. 23). Ele ainda argumenta:

Sem dúvida, seria mais simples *ensinar só o resultado*. Mas o ensino dos *resultados* da ciência nunca é um ensino científico. Se não for explicada a linha de produção espiritual que levou ao resultado, pode-se ter a certeza de que o aluno vai associar o resultado a suas imagens mais conhecidas. É preciso "que ele compreenda". Só se consegue guardar o que se compreende (*Ibidem*, p 289).

## CONCLUSÃO

A Álgebra Linear enquanto disciplina nos cursos de graduação tem tomado lugar importante nas pesquisas em Educação Matemática. Alguns estudos têm surgindo com o propósito de identificar as dificuldades dos alunos em aprender os seus conceitos, bem como identificar as falhas ocorridas no processo de ensino, tudo isso porque o índice de desistência e reprovação nesta disciplina tem sido muito grande.

Furtado e Cabral (2011) ao realizar uma pesquisa empírica qualitativa para investigar de que forma os conceitos básicos de Álgebra Linear eram assimilados pelos alunos, constaram que a maior dificuldade apontada pelos próprios alunos é a abstração presente no curso de Álgebra Linear, 65% dos alunos apontaram isso explicitamente e apenas 29% disseram que a falta de aplicações era um dificultador. O que mais surpreende é o resultado de que os alunos

não souberam reconhecer uma transformação linear, não conseguindo dizer claramente o que a caracterizava, a saber, não conseguiram dizer a definição de transformação linear.

Diante de tais fatos, estudar o processo de ensino e aprendizagem de transformação linear, identificando as causas de insucesso do processo é uma necessidade que este trabalho procura sanar, não totalmente, pois isso seria impossível, mas levantando alguns pontos que interferem diretamente na formação do conceito científico, pontos estes que segundo Bachelard chamam-se obstáculos epistemológicos.

Conclui-se que alguns destes obstáculos são: reprodução do conteúdo do livro didático no quadro negro; não entendimento do erro do aluno; obstáculo da experiência primeira; generalização do conhecimento a partir de dados empíricos; relação álgebra e geometria; simbologia algébrica; aplicação de conteúdos vistos anteriormente e fazer demonstrações e provas.

Estes obstáculos precisam ser superados para haver uma verdadeira aprendizagem e um caminho a ser seguindo é a utilização do método de ensino proposto por Davydov, o método do Ensino Desenvolvimental, priorizando a formação de conceitos científicos, partindo do conteúdo, considerando a historicidade do mesmo e conduzindo os alunos a dominar os processos de investigação e os procedimentos lógicos de pensamento, a fim de atingir a formação integral do aluno.

Portanto, tendo em vista que o levantamento de obstáculos epistemológicos possibilita a compreensão das dificuldades dos alunos no processo de ensino de aprendizagem de transformação linear e que o Ensino Desenvolvimental é um método que visa a formação de conceitos científicos, vê-se que a junção destes dois princípios é um caminho a ser seguido para a construção de um ensino significativo e real.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ANTON, H; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. Tradução de Claus Ivo Doering. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico*. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro – RJ: Contraponto, 1996.

\_\_\_\_\_. O novo espírito científico. In: *Os Pensadores*. Seleção de textos de José Américo Motta Pessanha. Traduções de Joaquim José Moura Ramos ... (et al.). São Paulo: Abril Cultural, 1978, p. 88 – 179.

BORGES, Marcos Francisco. *Obstáculos encontrados pelos alunos na aprendizagem da Álgebra Linear*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, 2007, Belo Horizonte – MG. *Anais...* Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. Disponível em: <[http://www.sbembrasil.org.br/files/ix\\_enem/Comunicacao\\_Cientifica/Trabalhos/CC06360883830T.doc](http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC06360883830T.doc)>. Acesso em: 25 jan. 2015.

DAVYDOV, V.V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica, teórica y experimental*. Moscou: Editorial Progreso, 1988.

DAVYDOV, V. V. What is real learning activity? In: HEDEGAARD, M.; LOMPSCHER, J. (Eds.), *Learning, activity and development*. Aarhus: Aarhus University Press, 1999. Tradução do inglês por Cristina Pereira Furtado, com revisão de José Carlos Libâneo e Raquel A. Marra da Madeira Freitas.

FURTADO, A. L. C.; CABRAL, M. A. P. *Aprendizagem de conceitos da álgebra linear*. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII. *Anais...* Recife, 2011.

FREITAS, R. A. M. M. Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 38, n. 2, p. 403-418, abr./jun. 2012.

HEDEGAARD, M. A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino. In: DANIELS, Harry (Org.). *Uma introdução a Vygotsky*. São Paulo: Loyola, 2002.

HISTÓRIA da Álgebra Linear. Disponível em: <<http://www.fat.uerj.br/intranet/disciplinas/Algebra%20Linear/Textos%20Divulga%E7%E3o/Hist%F3ria%20da%20C1lg.Linear.pdf>>. Acesso em: 06 jun 2015.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov *Revista Brasileira de Educação*. Set/Out/Nov/Dez 2004. n 27, p. 5 – 24.

LIBANEO, José Carlos; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.) *Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos*. Uberlândia: EDUFU, 2013, v. 1, p. 315 – 350.

LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. 7ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

PESSANHA, José Américo Motta. Vida e obra de Bachelard. In: *Os Pensadores*. Seleção de textos de José Américo Motta Pessanha. Traduções de Joaquim José Moura Ramos ... (et al.). São Paulo: Abril Cultural, 1978, p. V – XIV.

PINTO, Neuza Bertoni. *O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino de matemática elementar*. Campinas, SP: Papyrus, 2000.

TROVON, Alexandre. *Obstáculos epistemológicos e didáticos*. UFPR – Curitiba, 2009. Disponível em: <<http://people.ufpr.br/~trovon/cursos/especializacao2009/obstaculos.pdf>>. Acesso em 22/04/2015.

VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.